Ratkaisut

Pisteet annetaan yleensä seuraavasti:

- Oikea vastaus: 5 p
- Väärä vastaus: 0 p
- Joskus on annettu 1p tyhjästä vastauksesta tai 2p/3p osaksi oikein vastauksesta.

2004

1. kierros

Tehtävä 1

On olemassa **8 mahdollisuutta:**
6507, 5607, 6057, 5067,
6705, 7605, 6075, 7065

Tehtävä 2

Kaksi puoliympyrää (keskipisteet H ja I): 360 m.
Kaari BD on 1/6 ympyrästä, jolla on sama säde kuin puoliympyröillä: 60m.
Kaari GF on 1/6 ympyrästä (säde 3·puoliympyröiden säde): 180m.
Koko rata on yhteensä:
360m + 60m + 180m = **600m**

Tehtävä 3

	quarters	dimes	nickels
Mitch	1	2	11
Rebecca	2	4	2
Eric	3	2	1
Jenny	4	0	0

Heillä on yhteensä **32 kolikkoa.**

Tehtävä 4

Kuusi poikaa on 1 – 1/3 – 1/4- 1/6 = 1/4 vieraista. Juhlissa oli siis 6·4=**24 vierasta.**

Tehtävä 5

Hän käyttää yhteensä 55 sinistä ja punaista helmeä. Kuvion yksi mallikerta on:
P-V-P-P-S-S
Jokaista valkoista kohti hän käyttää siis kolme punaista ja kaksi sinistä.
Kymmenessä kuvioyksikössä hän käyttää 50 punaista ja sinistä. Molemmissa päissä on myös tilaa muutamalle punaiselle ja siniselle, siis:
P-P- S -S- XXXXXXXXXXXX-P

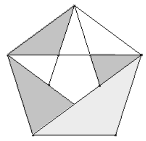
Siis yhteensä 50 + 5 = **55 punaista ja sinistä helmeä**.

Tehtävä 6

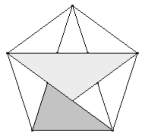
Suuri pizza maksaa:
5,85 € / ($\pi \cdot 15^2$ cm^2) = 0,00828 €/cm^2
Pieni pizza maksaa:
5 € : ($\pi \cdot 12{,}5^2$ cm^2) = 0,01019 €/cm^2
Prosenteissa:
((0,01019 €/cm^2 - 0,00828 €/cm^2) · 100%) / 0,01019 €/cm^2 = **19%**

Tehtävä 7

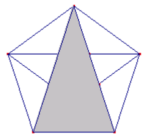
Yhteensä 35 kolmiota.



5 kpl kaikkia kuvassa esitetyn tyyppisiä kolmioita: 4 · 5 = 20 kolmiota.



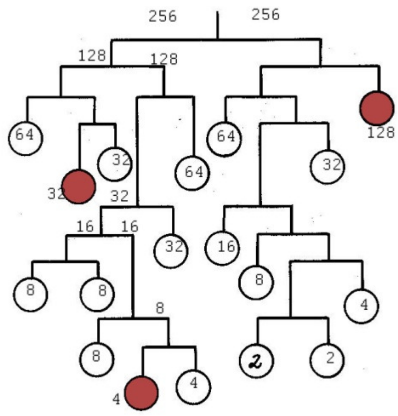
5 kpl kaikkia näiden tyyppisiä kolmioita: 2 · 5 = 10 kolmiota.



Ja lopuksi 5 tällaista kolmiota.

Tehtävä 8

Värillinen punnus oikealla painaa 128. Jotta systeemi olisi tasapainossa, täytyy oikean puolen painaa yhteensä 256. Merkitään alimpana olevan värillisen punnuksen massaa x:llä. Tällöin voidaan päätellä (jälleen tasapainon säilymisen perusteella), että toinen värillinen punnus vasemmalla painaa 8x. Oikea puoli painaa yhtä paljon kuin vasen, joten: x=4 ja punaisten punnusten massojen summa on 4+32+128=**164, (e).**



2. kierros

Tehtävä 1

Leenalla on 40 palloa (ja Hannulla on 24 palloa). Jos Leena antaa 8 palloa Hannulle, heillä on molemmilla 32 palloa. Jos Hannu antaa 8 palloa Leenalle, hänellä on 16 ja Leenalla on 48 (=3·16) palloa. Jos Leenalla on L palloa ja Hannulla H palloa, saadaan: H+8=L-8 ja L+8 = 3 (H-8)

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan
H – 8 = L – 24, mikä voidaan yhdistää toiseen yhtälöön:
L + 8 = 3 (L – 24) = 3L – 72
Saadaan 2L = 80 → L = 40

Tehtävä 2

Järjestys on:
1. Anna – 48 minuuuttia
2. Cecilia – 50 minuuttia
3. Berit – 60 minuuttia

BF = 2 km ja EF = 8 km. Silloin CB = 8 km ja CE = 2 km. AB = 2 · CE = 4 km. AD = 3/2 AB = 6 km. AC = CB = 8 km. CD = 10 km.

Annan reitti on 10 km + 6 km + 8 km = 24 km. Hänen käyttämänsä aika on 24 km / 30 km/h = 4/5 · 60 min **= 48 min**
Beritin reitti on 8 km + 4 km + 8 km = 20 km. Hänen käyttämänsä aika on 20 km /20 km/h = 1 h = **60 min**
Cecilian reitti on 2 km + 8 km + 2 km + 8 km = 20 km. Hänen käyttämänsä aika on 20 km /24 km/h = 5/6 · 60 min = **50 min**

Tehtävä 3

Todennäköisyys on 25%.
Niput koostuu näistä tikkuyhdistelmistä:
1cm – 1cm – 10cm
1cm – 2 cm – 9cm
1cm – 3cm – 8cm
1cm – 4cm – 7cm
1cm – 5cm – 6cm
2cm – 2cm – 8cm
2cm – 3cm – 7cm
2cm – 4cm – 6cm
2cm – 5cm – 5cm
3cm – 3cm – 6cm
3cm – 4cm – 5cm
4cm – 4cm – 4cm

3 näistä 12 nipusta sisältää tikut, joista voidaan muodostaa kolmio.
Todennäköisyys saada sellainen nippu on 3/12=1/4=25% .
(Kahden lyhimmän tikun pituuksien summan täytyy olla suurempi kuin pisimmän tikun pituus.)

Tehtävä 4

15 cm
Ratkaisu saadaan helpoimmin piirtämällä normaalit kuusikulmion kulmista kolmion sivuille. Tällöin saadaan kaksi pientä suorakulmaista kolmiota suorakulmion molemmille puolille. Nämä kolmiot voidaan yhdistää tasasivuiseksi kolmioksi, jonka sivujen pituudet ovat (10/2) cm = 5 cm. Näin ollen kolmion sivun pituus on 10 cm + 5 cm = 15 cm.

Tehtävä 5

Yhteensä 160 oppilasta.
Banaanin ostajia oli ¼ hedelmien ostajista. Hedelmien ostajia oli siis yhteensä 4·15=60.
Hedelmien ostajat muodostivat ¾ jotakin ostaneiden oppilaiden määrästä, joka oli siis 60/(3/4)=80.
Koska puolet oppilaista osti jotakin, oli oppilaita yhteensä 2·80=160.

Tehtävä 6

Saadaan 16 rajoittamatonta osaa.
Jokaista piirrettyä tangenttia kohti syntyy kaksi rajoittamatonta aluetta. Jos siis n on tangenttien lukumäärä, saadaan $2n$ rajoittamatonta osaa.

Tehtävä 7

Violalla on 11 henkivartijaa ja Fialla on 7.
Alussa Violalla on 2 henkivartijaa enemmän kuin Fialla. Jos heillä on yhteensä alle 30 henkivartijaa, Fialla täytyy olla alle 14 henkivartijaa. Nyt Violalla on 4 henkivartijaa enemmän kuin Fialla, koska Fialla on 1 vähemmän ja Violalla 1 enemmän kuin alussa.
Meidän täytyy siis löytää kaksi alkulukua, jotka ovat pienempiä kuin 13 ja joiden erotus on 4. Mahdollisia ovat 2, 3, 5, 7, 11 ja 13.
Näistä vain 11-7=4. Myös 17-13=4, mutta niiden summa on 30, eikä sovi ehtoihin.

Tehtävä 8

Kello oli 21:39
Ehdosta 2 voidaan päätellä, että minuuttiluvun täytyy olla jokin seuraavista:
00 11 42 24 tai 39,

jolloin ehdon 1 perusteella vastaavat tuntiluvut olisivat:
60 49 36 18 tai 21.

Näistä vain 18:24 ja 21:39 ovat oikeita aikoja. Koska ainoastaan jälkimmäinen toteuttaa viimeisen annetun ehdon (3+9=12 eli 21 takaperin), on oikea vastaus 21:39.

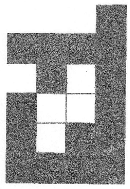
Semifinaali

Tehtävä 1

a) Pienten kolmioiden pinta-ala on 1/2. Neliön ja keskisuuren kolmion pinta-ala on 1 ja kahden ison kolmioiden pinta-ala on 2.

b) On 4 eri tapaa valmistaa kolmio, jonka pinta-ala on 2. (Iso kolmio pinta-alalla 2 lasketaan yhdeksi.) Muut ovat: 2 pientä kolmiota+neliö, 2 pientä kolmiota+suunnikas, 2 pientä kolmiota+keskisuuri kolmio.

Tehtävä 2



Tehtävä 3

a)

4 @1	4
4 @ 2	11
4 @ 3	18
4 @ 4	25
4 @ 5	32
4 @ 6	39
4 @ 7	46
4 @ 8	53
4 @ 9	60
4 @ 10	67

b) Sääntö:
$4 @ n = 4 \cdot n + 3 \cdot (n-1)$
$4 @ 20 = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 19 = 80 + 57 = 137$

c) Sääntö:
$7 @ n = 7 \cdot n + 6 \cdot (n-1)$
$7 @ 8 = 7 \cdot 8 + 6 \cdot 7 = 98$

Yleisesti:
$m @ n = m \cdot n + (m-1) \cdot (n-1)$

Tehtävä 4

Petteri-Anni-Janne-Erkki-Kirsti-Hannu-Maria

Tehtävä 5

Löytyy 16 eri ratkaisua, jos 0 ei saa olla ensimmäisenä numerona.
Jos laskun ONE +ONE = TWO pitää olla oikein, eikä mikään luku saa olla kaksinumeroinen, pitää O:n olla 5:ttä pienempi parillinen luku. Siis on kaksi mahdollisuutta: O=2 tai O=4.

Vaihtoehto 1: O=2. Silloin E=1 tai E=6. Järjestelmällinen kokeileminen antaa seuraavat ratkaisut:
231+231=432
271+271=542
281+281=562
291+291=582
206+206=412
216+216=432
236+236=472
286+286=572

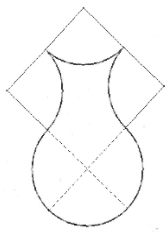
Vaihtoehto 2: O=4. Silloin E=2 tai E=7. Järjestelmällinen kokeileminen antaa seuraavat ratkaisut:
432+432=864
452+452=904
482+482=964
407+407=814
417+417=834
427+427=854
457+457=914
467+467=934

Huom: oppilaat saavat eri pistemäärän riippuen siitä, ovatko he huomioineet, että O ei voi olla nolla.

Tehtävä 6

1-c, 2-e, 3-g, 4-d, 5-a, 6-f, 7-b

Tehtävä 7



Tehtävä 8

Mahdolliset jaot :

Merkitty	**Mahdolliset sisällöt**	
2	1€ ja 50c	2 kpl 50c
1, 50	2 kpl 1€	2 kpl 50c
1	2kpl 1€	1€ ja 50c

a) Riippumatta siitä, mikä purkki avataan, on mahdollista määrittää muiden purkkien sisällöt.

1) Purkki, johon on merkitty 2€ avataan: Jos löydetään 1€:n ja 50c:n kolikot, tiedetään, että sitä yhdistelmää ei voi olla purkissa, johon on merkitty 1€. Silloin siinä purkissa täytyy olla 2€ ja purkin, johon on merkitty 1,50€, täytyy sisältää 1€ (kaksi 50c:n kolikkoa)

Jos löydetään kaksi 50c:n kolikkoa, purkin, johon on merkitty 1,50€ täytyy sisältää 2€ (kaksi euron kolikkoa) ja purkki, johon on merkitty 1 € sisältää 1€:n ja 50c;n kolikot.

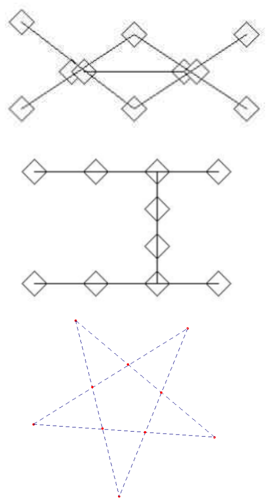
2) Purkki, johon on merkitty 1,50€ avataan: Jos löydetään 2€, purkki, johon on merkitty 1€ sisältää 1,50€, ja purkki, johon on merkitty 2€ sisältää 1€.
Jos löydetään 1€, purkin, johon on merkitty 2€ täytyy sisältää 1,50€ ja purkin, johon on merkitty 1 € täytyy sisältää 2€.

3) Jos avataan purkki, johon on merkitty 1€, suoritetan vastaavat päättelyt.

b) Tämän selvittääkseen on valittava avattavaksi purkki, johon on merkitty 1,50€. Kyseisen purkin on nimittäin sisällettävä kaksi samaa kolikkoa. Tämän jälkeen suoritetaan päättely kuten a-kohdassa.

Kansallinen loppukilpailu

Tehtävä 1



Tehtävä 2

Siirto nro:	Paikalta nro	Paikalle nro
1	4	1
2	6	9
3	8	3
4	2	5
5	7	10

Tehtävä 3 **a – d – g – h – f – b – e – c**

Tehtävä 4

Olkoon lukujono: a c d e f g
Vihje 1: $f = 4c = 8a$
Vihje 2: $c = b + 1$ ja $d = c + 1 = b + 2$

Jos $c = b + 1$ sijoitetaan vihjeeseen 1,
saadaan: $4b + 4 = 8a$ eli $b = 2a - 1$
Tällöin $c = 2a$ ja $d = 2a + 1$
Vihje 3: $e = c + d = 4a + 1$
Vihje 4: $a + b + c + d + e + f = 20$
$a + (2a - 1) + 2a + (2a + 1) + (4a + 1) + 8a = 20$
$19a + 1 = 20 \rightarrow a = 1$

Lukujono on: 1 1 2 3 5 8
Tämä on Fibonaccin lukujono, ja seitsemäs luku on 5 + 8 = 13.

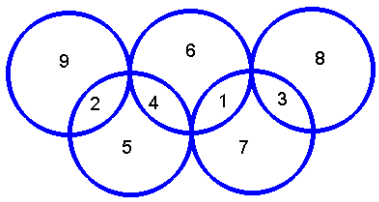
Tehtävä 5

2 4 + 6 9 = 9 3
3 8 – 1 3 = 2 5
1 2 · 1 5 = 1 8 0
7 8 : 1 3 = 6
5 7 + 4 6 = 1 0 3

Kommentti **Tehtävä 5:** Annetaan pisteet kaikista oikeista laskuista.

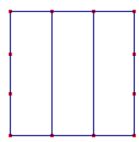
Pohjoismainen loppukilpailu

Tehtävä 1

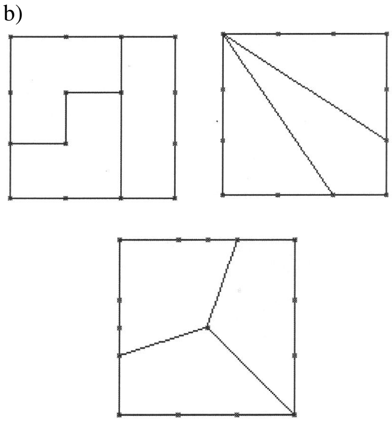


Tehtävä 2

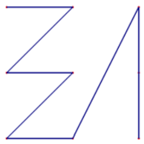
a)



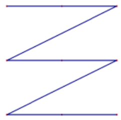
b)



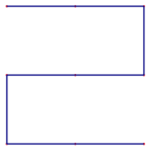
Tehtävä 3



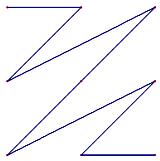
$5+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 9.56$



$6+2\sqrt{3}\approx 9.46$



8



$2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx 11.12$

Tehtävä 4

2 pyörää	3 pyörää	4 pyörää
1	1	1
3	1	2
5	1	1
7	1	0
0	3	2
2	3	1
4	3	0
1	5	0

Tehtävä 8

10 + 6 + 3 + 1 = **20 eri tavalla.**
A = Suvi, B = Tiina, C = Marja, D = Riina

A	B	C	D
1	1	1	4
1	1	2	3
1	1	3	2
1	1	4	1
1	2	1	3
1	2	2	2
1	2	3	1
1	3	1	2
1	3	2	1
1	4	1	1
2	1	1	3
2	1	2	2
2	1	3	1
2	2	1	2
2	2	2	1
2	3	1	1
3	1	1	2
3	1	2	1
3	2	1	1
4	1	1	1

Kommentti

Tehtävä 2: Tähän tehtävään on kaksi mahdollista ratkaisua, jotka molemmat on löydettävä saadakseen 5 pistettä. Yksi oikea vastaus oikeuttaa 3 pisteeseen. Yksi väärä ja yksi oikea vastaus antaa 2 pistettä.

Tehtävä 3: 81 oikeuttaa 5 pisteeseen,
72 oikeuttaa 3 pisteeseen,
64 oikeuttaa 2 pisteeseen.
Alle 64:n olevat vastaukset oikeuttavat 0 pisteeseen.
Tyhjä vastaus oikeuttaa yhteen pisteeseen.

2005

1. kierros

Tehtävä 1

Aikojen summa on 7 h 20 min ja 0 sek = 440 min. joka antaa keskiarvon 88 min.
1,25·88 min = 110 min = **1 h 50 min.**

Tehtävä 2

Ratkaisut ovat **2 undulaattia ja 5 marsua tai 7 undulaattia ja 2 marsua**

Tehtävä 3

3 · 3· 3· 3 = 81 antaa suurimman tulon.

Tehtävä 4

7 heksakoni-eläintä.

Tehtävä 5

	Kyösti	Antti	Jukka
Juusto	2	1	1
Kinkku	1	0	3
Tomaatti	1	3	0

Kyösti saa 1 kinkkusämpylän.

Tehtävä 6

113 ja 131

Tehtävä 7

50 tyttöä

2. kierros

Tehtävä 1

Lukusarja on:
4, 317, 12, **4**, 317, 12, 4, 317, 12, 4, 317, **12**

Tehtävä 2

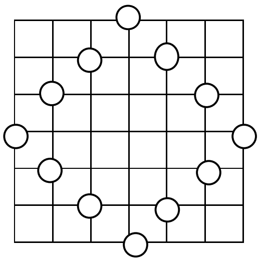
Neliön pinta-ala on 175 cm^2.
Kolmessa suorakulmiossa lyhyiden sivujen pituudet ovat puolet pitkien sivujen pituuksista. Merkitään lyhyen sivun pituutta x:llä. Tällöin ison suorakulmion sivujen pituudet ovat 3x ja 2x ja saadaan seuraavat lausekkeet pinta-alalle ja piirille:
Pinta-ala: 2x·3x = 168 = 6x^2, mistä saadaan x^2 = 28.
Piiri: 2x+2x+3x+3x = 10 x .
Merkitään neliön sivun pituutta s:llä.
Tällöin pinta-ala on s^2 ja piirin pituus 4s.
Koska piirin pituuden on oltava sama kuin suorakulmiolla, saadaan 4s=10x, mistä saadaan s=5/2 x.
Neliön pinta-ala on siis:
A = s^2 = (5/2 x)^2 = 25/4 · 28 = **175.**

Tehtävä 3

40%
Yhtä kuusikulmion kärkeä voidaan käyttää 10 eri kolmion kärkenä. Niistä 3 on tasakylkisiä ja 1 on tasasivuinen.

Tehtävä 4

Suurin lukumäärä risteyksiä, jotka voidaan vangita 12 kivellä on **13.**



Tehtävä 5

d) Kaikki kolme vaihtoehtoa ovat yhtä todennäköisiä.
Kolmella nopalla saadaan seuraava heittosarja:

Noppa				
1	2	3	Summa	Jakojäännös, kun jaetaan 3:ll
1	1	1	3	0
1	1	2	4	1
1	2	1	4	1
2	1	1	4	1
1	2	2	5	1
2	1	2	5	1
2	2	1	5	1
1	1	3	5	1
1	3	1	5	1
3	1	1	5	1
3	2	1	6	0
2	3	1	6	0
2	1	3	6	0

Jne.

Summa	Tapojen lkm
3	1
4	3
5	6
6	10
7	15
8	21
9	25
10	27
11	27
12	25
13	21
14	15
15	10
16	6
17	3
18	1

Jakojäännökseksi saadaan 0, kun summa on 3, 6, 9, 12, 15 tai 18, ts. **72 kertaa.**

Jakojäännökseksi saadaan 1, kun summa on 4, 7, 10, 13 tai 16, ts. **72 kertaa**.

Jakojäännökseksi saadaan 2, kun summa on 5, 8, 11, 14 tai 17, ts. **72 kertaa.**

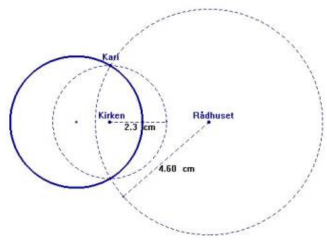
Tehtävä 6

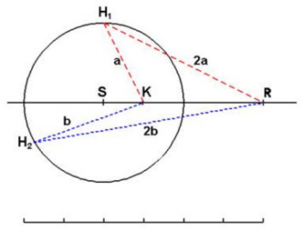
b) Neljä kertaa.
Koska 37/64 on pienempi kuin 2/3, ja 175/265 on suurempi kuin 2/3, porkkanoita on puristettava vähintään neljä kertaa.

Puris-tusten määrä	Puristettu osuus	Jäljellä oleva osuus	Yht. puristettu mehua
1 2 3 4	1/4 1/4 · 3/4 = 3/16 1/4 · 9/16 = 9/64 1/4 · 27/64 = 27/265	3/4 3/4 - 3/16 = 9/16 9/16 – 9/64 = 27/64 27/64 – 27/265 = 81/265	1/4 1/4 + 3/16 = 7/16 7/16 + 9/64 = 37/64 37/64 + 27/265 = 175/265

Tehtävä 7

Vaihtoehto d)





Tehtävä 8

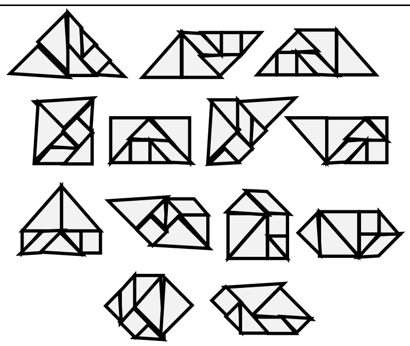
a) **585**
b) Kolme lukua: **585, 52225 ja 25252.**

Koska 200 = 2·2·2·5·5,
voidaan muodostaa palindromiluvut:
585
25252
52225
1522251
5122215
5212125

	Lukuja saadaan enemmän, kun otetaan mukaan kaksi ykköstä, ja äärettömän monta lisäämällä aina vain enemmän ykkösiä. Kuuden pienimmän luvun joukossa on neljä kolmella jaollista, mutta vain 585 on pienempi kuin 100 000.
Kommentti	**Tehtävä 7:** Vaihtoehto a) antaa 1p. Vaihtoehto b) antaa 2p (ajatellaan, että talo on joko kirkon ja kaupungintalon välissä tai kauempana kuin kirkko, joten kirkko on Marin talon ja kaupungintalon välissä).

Semifinaali

Tehtävä 1

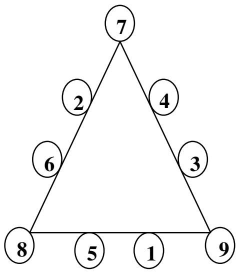


Tehtävä 2

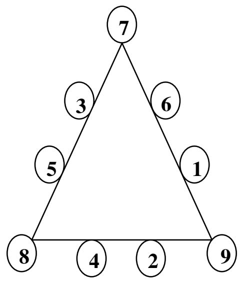
Kuusi kolikkoa voidaan sijoittaa $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ eri tavalla.
50 sentin kolikot molemmissa päissä voidaan valita $3 \cdot 2 = 6$ eri tavalla ja muut kolikot voidaan sijoittaa $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ eri tavalla. Todennäköisyys saada 50 sentin kolikot molemmissa päissä on:
$6 \cdot 24/720 = 1/5$ tai $3/6 \cdot 2/5 = 1/5$.

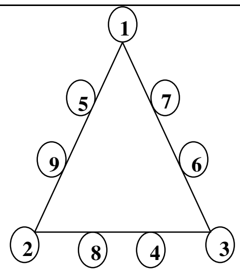
Tehtävä 3

a)

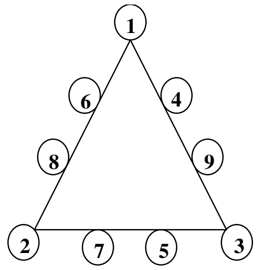


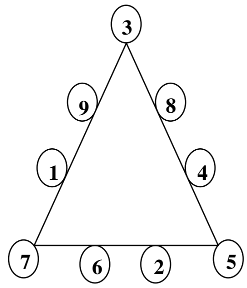
Maaginen summa = 23



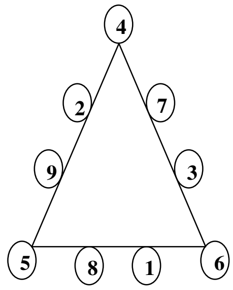


Maaginen summa = 17





Maaginen summa = 20

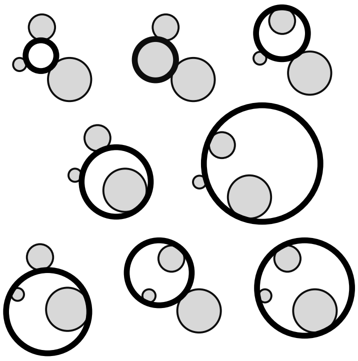


b) Pienin summa on 17 ja suurin on 23.

Tehtävä 4

Koodi on 7652387
Koska kolmen ensimmäisen luvun summa on 18, keskimmäisen luvun täytyy olla 18/3=6.
Siis kolme ensimmäistä numeroa ovat 7,6 ja 5. Voidaan tarkistaa, että niiden tulo on 210.
Yksinumeroiset alkuluvut ovat 2, 3, 5 ja 7.
Koska näiden neljän luvun tulo on 336, 5 ei voi olla niiden joukossa. Alkulukujen täytyy olla 2, 3 ja 7. Näiden tulo on 42. Viimeisen luvun täytyy olla 336/42=8.
Neljä viimeistä lukua ovat siis 2387.

Tehtävä 5

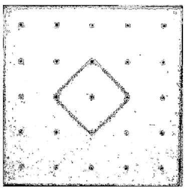


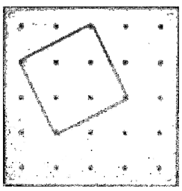
Tehtävä 6

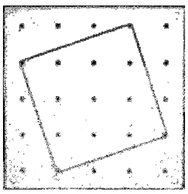
Luvut ovat **16, 34, 52** ja **70**.

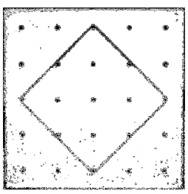
x<100 ja x+2 jaollinen 6:lla	Numeroiden-summa	Numeroiden-summa jaollinen 7:lla
4	4	
10	1	
16	**7**	Kyllä
22	4	
28	10	
34	**7**	Kyllä
40	4	
46	10	
52	**7**	Kyllä
58	13	
64	10	
70	**7**	Kyllä
76	13	
82	10	
88	16	
94	13	

Tehtävä 7


Pinta-ala=2


Pinta-ala=5


Pinta-ala=8


Pinta-ala=10

Kansallinen loppukilpailu

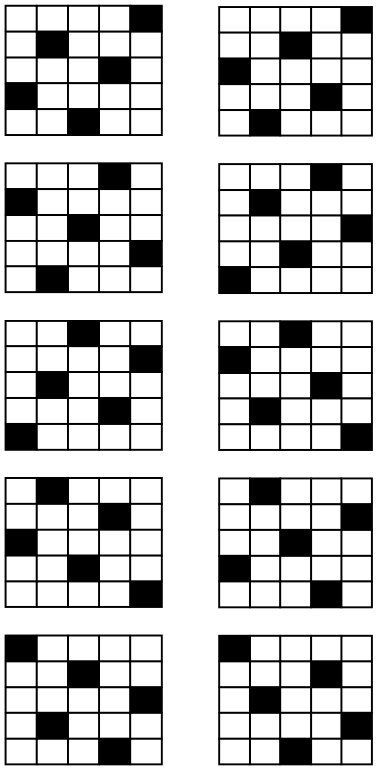
Tehtävä 1

Kaikki luvut voidaan kirjoittaa kakkosen potenssien summana. Luvut, jotka ovat pienempiä kuin 31, voidaan kirjoittaa yhdistelmänä luvuista 1, 2, 4, 8 ja 16, mutta kaikkia lukuja ei käytetä joka kerralla.

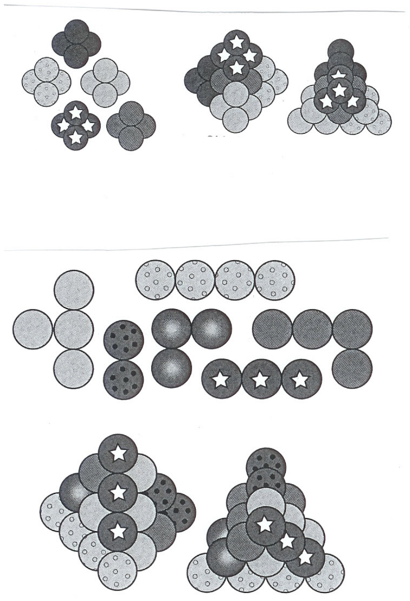
Jokaisessa lukukortissa ovat ne luvut, joiden summalausekkeessa on oltava kortin ensimmäinen luku mukana. Esimerkiksi voidaan katsoa korttia A ja huomataan, että kaikki parittomat luvut ovat mukana. Luvun 1 täytyy olla mukana, jotta saadaan pariton summa, koska kaikki muut luvut ovat parillisia.
Kortista E lödetään kaikki luvut, jotka ovat suurempia kuin 16, koska 16:n täytyy olla mukana suurimmissa luvuissa (summista tulee muuten liian pieniä). 31 on mukana kaikissa korteissa, koska 1+2+4+8+16 =31.

Tehtävä 2

On olemasssa 10 eri ratkaisua.



Tehtävä 3



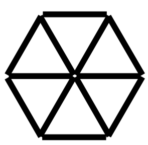
Tehtävä 4

Merkitään kolmea miestä M1. M2 ja M3 ja

Matka -nro:	Joki-reuna 1	Veneessä	Joki -reuna 2
1	M2, M3, D2, D3	M1, N1	
2	M2, M3, D2, D3	N1	N1
3	M1, M2, M3	N2, N3	N1
4	M1, M2, M3	N1	N2, N3
5	M2, M3	M1, N1	N2, N3
6	M2, M3	M1	N1, N2, N3
7	M3	M1, M2	N1, N2, N3
8	M3	N3	M1, M2, N1, N2
9		M3, N3	M1, M2, D1, D2
			M1, M2, M3, N1, N2, N3

kolmea naista N1, N2 ja N3.

Tehtävä 5



Pohjoismainen loppukilpailu

Tehtävä 2

Pohjatason luvut			Sivujen luvut		
1	6	3	7	9	4
1	2	7	3	9	8
1	4	5	5	9	6

Tehtävä 3

Kappale koostuu kahdesta kolmiopyramidista, joiden pohjina on sama tasasivuinen kolmio. Pyramidien tahkoina ovat suorakulmaiset ja tasakylkiset kolmiot, joiden hypotenuusat ovat pohjakolmion sivuina. Kuviossa on kuusi yhtenevää tahkoa.
Vaipan lausekkeen määritelmä: Neljä tahkoa voidaan yhdistää neliöksi, jonka sivu on *s*. Siten kaksoistetraedrin vaipan pinta-ala on $1{,}5\ s^{2}$.
Ylimääräinen toteamus: Kaksoistetraedri voidaan nähdä kahtena suorakulmaisena kolmiopyramidina. Pyramidien yhteisen pohjan pinta-ala on $\frac{1}{4}\ s^2$ ja niiden korkeus on s/sqrt2. Siten kaksoistetraedin tilavuus on $2\cdot(1/3)\cdot(1/4)\ s^2\ \cdot s/(\sqrt{2})$.

Tehtävä 4

Oppilas 1	Oppilas 2
2	3
9	8
3	4
8	7

Selitämme lukuparit (2,3) ja (3,4):
Ratkaisu a): Jos oppilas 1 on saanut luvun 2, hän tietää, että oppilas 2 on saanut luvun 1 tai 3. Koska oppilas 2 ei tiedä, minkä luvun oppilas 1 on saanut, oppilas 2 ei ole voinut saada lukua 1. Tästä seuraa, että oppilas 2 on saanut luvun 3.
Ratkaisu b): Jos oppilas 1 on saanut luvun 3 ja sanoo, että hän ei tiedä, mikä luku toisella oppilaalla on, oppilas 1 ei ole voinut saada lukua 1 tai 10. Jos oppilas 2 olisi saanut luvun 2, hän olisi tiennyt, että oppilas 1 oli saanut luvun 3. Tästä seuraa, että oppilas 2 on saanut luvun 4.

Tehtävä 5

Sisään-käynnillä	Tunne-lissa	Ulos-käynnillä	Käytetty aika
ä, i, p, t	-	-	-
p, t	ä,i	-	2 min
p, t	ä	i	2 min
ä	p, t	i	5 min
ä	i	p, t	1 min
-	ä, i	p, t	2 min
-	-	ä, i, p, t	-
			12 min

ä= äiti, i=isä, p=poika, t=tyttö

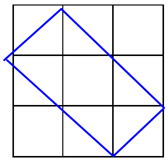
2006

1. kierros

Tehtävä 1

c) 4/9

Suorakulmion pinta-ala:
$3b\cdot 3b = 9b^2$
Neliön pinta-ala: $9b^2 - 2\, b\cdot b/2 - 2\, a\cdot a/2 = 9b^2 - b^2 - 2\cdot 2b\cdot 2b/2 = 4b^2$



Neliön osuus suorakulmion pinta-alasta: $4b^2/9b^2 = 4/9$.

Tehtävä 2

Anna: koripallo, golf
Eva: jalkapallo, käsipallo
Hans: laskettelu, tennis

Tehtävä 3

Pekka oli kuluttanut tasan 1/4 siitä, mitä hänellä oli jäljellä.
Voidaan siis jakaa 100 € viiteen osaan, joista yksi on kulutettu.
Hänellä oli 80 € jäljellä.

Tehtävä 4

53-3=50 50/2 = 25.
Luvun 25 neliöjuuri on 5.
Tarkistus: $5\cdot 5 = 25$ $25\cdot 2+3=53$

Tehtävä 5

Appelsiinien määrä kaikissa kerroksissa yhteensä on:
$5\cdot 8 + 4\cdot 7 + 3\cdot 6 + 2\cdot 5 + 1\cdot 4 = 100$.
Vastaus on siis **100 appelsiinia.**

Tehtävä 6

Luku on **2 3 4 2 1 3 1 4** tai päinvastoin **4 1 3 1 2 4 3 2**

Tehtävä 7

Viivojen on oltava **1, 2, 3 ja 8** yksikön päässä viivoittimen päästä.

Tehtävä 8

Pinta-ala on $2\cdot 2 - \pi$ = **0,86 cm²**

2. kierros

Tehtävä 1

Huomatkaa, että eri sarakkeiden luvuista jää eri jakojäännökset, kun luvut jaetaan 8:lla.

Luvut sarakkeissa ovat muotoa:
A: 9+8k
B: 2+8k ja 8k
C: 3+4k
D: 4+8k ja 6+8k
E: 5+8k
k= 0, 1, 2, …

a) **B**, koska $1000 = 8\cdot 125$
b) **D**, koska $2398 = 6 + 8\cdot 299$

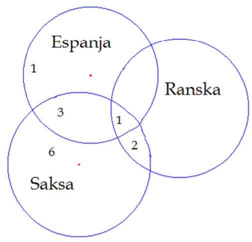
Tehtävä 2

Ratkaisuesimerkit:

$\frac{2697}{13485}, \frac{2937}{14685}, \frac{2967}{14835}, \frac{3297}{16485}, \frac{3729}{18645}, \frac{3847}{19235}, \frac{6297}{31485}, \frac{7629}{38145}, \frac{9237}{46185}, \frac{9627}{48135}, \frac{9723}{48615}$

Tehtävä 3

Ympyräkuvion avulla voidaan päätellä seuraavasti:



Kuvasta nähdään, että yhteensä 16 oppilasta on valinnut annettuja kieliä ja **4 oppilasta ei ole valinnut mitään näistä kielistä.**

Tehtävä 4

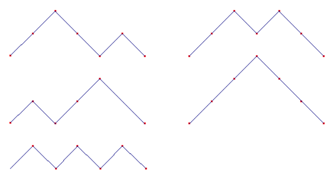
12 km
Merkitään x:llä Pekan sunnuntaina kävelemää matkaa (km). Silloin hän kävelee:

Sunnuntaina: x
Maanantaina: x+1
Tiistaina: x+2
Keskiviikkona: x+3
Torstaina: x+4
Perjantaina: x+5
Lauantaina: x+6
Sunnuntaina: x+7
Maanantaina: x+8

Summa on: $9x+36=117 \rightarrow x=9$
Keskiviikkona hän käveli: (9+3)km=12 km

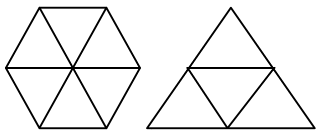
Tehtävä 5

5 eri reittiä.
Ensimmäisessä ja viimeisessä hypyssä jäniksellä on vain yksi vaihtoehto: ensimmäisessä pisteestä (0,0) pisteeseen (1,1) ja viimeisessä pisteestä (5,1) pisteeseen (6,0). Pisteestä (1,1) jänis voi hypätä pisteeseen (2,2)tai pisteeseen (2,0). Pisteestä (2,2) on 3 eri reittiä maaliin, ja pisteestä (2,0) on 2 eri reittiä (kts. kuva).



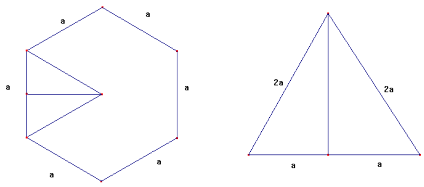
Tehtävä 6		

a) **Kuusikulmion pinta-ala on suurempi.**
b) Kuusikulmion pinta-ala on 50% suurempi kuin kolmion pinta-ala.



Tai:

Kolmion sivu on a, siis korkeus on $\sqrt{3}a$.
Tällöin pinta-ala on
$$\frac{\sqrt{3}a \cdot 2a}{2} = \sqrt{3}a^2$$
Säännöllisessä kuusikulmiossa on kuusi kolmiota, joiden korkeus on $\frac{\sqrt{3}a}{2}$



Kuusikulmion pinta-alaksi saadaan tällöin
$$\frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}a \cdot a}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a \cdot a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$

Kuusikulmiolla on suurempi pinta-ala, ja se on 3/2=1,5 kertaa niin suuri kuin kolmion pinta-ala (eli 50% suurempi). (Kuviot voidaan myös leikata irti ja punnita tarkalla vaa'alla.)

Tehtävä 7

5 koirankoppia.
Kokeileminen taulukolla:

Valmiita	Ei valmistunut	Luokan tulot
1	9	-500 €
2	8	0
3	7	500 €
4	6	1000 €
5	5	1500 €
…	…	…

Laskemalla: Merkitään valmiiden koirankoppien lukumäärää x:llä. Tällöin tekemättä jäi (10 – x) koirankoppia.
Saadaan:
400x - (10-x)·100 = 1500 → x = 5.

Tehtävä 8

5·5 neliö 1 kpl
4·4 neliö 4 kpl
3·3 neliö 9 kpl
2·2 neliö 4 kpl
1·1 neliö 1 kpl
Yhteensä on 19 neliötä.

Kommentti

Tehtävä 1: 3 p saadaan, jos a) tai b) on oikein ja 5 p saadaan, jos molemmat vastaukset ovat oikein.
Tehtävä 2: 3 p yhdestä oikeasta vastauksesta, 4 p kahdesta oikeasta vastauksesta ja 5 p kolmesta oikeasta vastauksesta. (Oikeita ratkaisuja on olemassa useampiakin.)
Tehtävä 3: 2p, jos ainoastaan a)-kohta on oikein.
Tehtävä 6: 2 p, jos ainoastaan a)-kohta on oikein.

Semifinaali

Tehtävä 1

Saadaan **15 erilaista suorakulmiota**. Näistä 6 on samankokoisia kuin suorakulmio, jonka kärjet ovat kohdissa 12, 1, 6 ja 7. Toiset 6 ovat samankokoisia kuin suorakulmio, jonka kärjet ovat kulmissa 12, 2, 6 ja 8, ja 3 samankokoisia kuin suorakulmio, jonka kärjet ovat kulmissa 12, 3, 6 ja 9.

Tehtävä 2

	munaa
Äiti	**8**
Isoisä	**4**
Setä	**2**
Sisko	**1**
Kustaa koristeli yhteensä	**15**

Tehtävä 3

Huomaa, että kaikissa korteissa, jotka ovat haplonkeja, on pelkästään kuudella jaollisia lukuja. Kortti B on ainoa neljästä alimmasta kortista, jolla on kyseinen ominaisuus.

Tehtävä 5

a) Esim.: 10=2+2·3, 18=3+3·5, 24=3+3·5
b) 38=29+3·3
38=23+3·5
38=17+3·7
38=13+5·5
38=5+3·11
38=3+5·7

c) Käydään järjestelmällisesti läpi eri vaihtoehdot siten, että jokainen 38:aa pienempi alkuluku on vuorollaan *a:*
37 ei anna yhtään ratkaisua, sillä ei ole olemassa kahta alkulukua, joiden tulo olisi 1.
29 antaa yhden ratkaisun , koska 3·3=9
23 antaa yhden ratkaisun, koska 3·5=15
19 ei anna yhtään ratkaisua, sillä ei ole kahta alkulukua, joiden tulo olisi 19
17 antaa yhden ratkaisun, koska 3·7=21
13 antaa yhden ratkaisun, koska 5·5=25
11 ei anna yhtään ratkaisua, sillä ei ole kahta alkulukua joiden tulo olisi 27
7 ei anna yhtään ratkaisua, sillä ei ole kahta alkulukua joiden tulo olisi 31
5 antaa yhden ratkaisun, koska 3·11=33
3 antaa yhden ratkaisun, koska 5·7=35
2 ei anna yhtään ratkaisua, sillä ei ole kahta alkulukua joiden tulo olisi 36.

Tehtävä 6

On 2 ratkaisua, jotka antavat pinta-alaksi 1200 m^2:

- suorakulmion kärjistä kolme on jokaisen sivun keskipisteessä (30m · 40m=1200 m^2).
- suorakulmion kärjistä kaksi on kateettien keskipisteissä ja kaksi hypotenuusalla (24m·50m=1200 m^2).

Tehtävä 7

a)

i)	2x2 ruutua	5
ii)	3x3 ruutua	13
iii)	4x4 ruutua	21
	5x5 ruutua	29

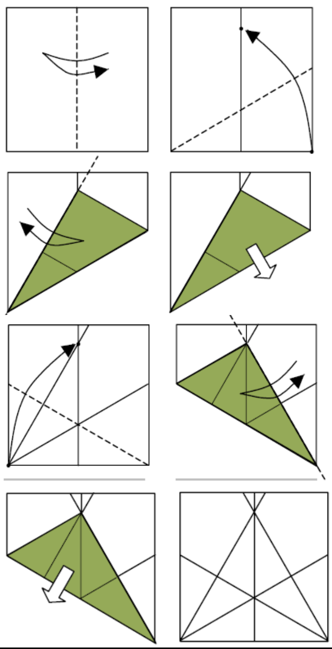
b) Siirtojen määrä kasvaa 8:lla joka kerta, kun pelilaudan sivu kasvaa 1:llä.
Siirtojen määrä kokoa 10x10 olevassa ruudukossa saadaan lisäämällä 8 21:een kuusi kertaa, siis 21+6·8=21+48=69.
On mahdollista laskea siirtojen määrä suoraan: Jos s on neliön sivun pituus, saadaan lauseke 8s-11, joka kertoo kuinka monta siirtoa tarvitaan.
Kokoa 10x10 olevassa ruudukossa saadaan 8·10-11=80-11=69 siirtoa.

Tehtävä 8

Vaitoehto A on oikein.
Jos näet värillisen pään, sinulla ei varmasti ole tikkua, jonka kumpikin pää olisi väritön. Nyrkissäsi oleva pää on siis kahdessa tapauksessa kolmesta samanlainen kuin se, joka nähdään. Eli mahdollisuus, että piilotettu pää on samanlainen kun se, jonka näet, on 66,67%.

Kansallinen loppukilpailu

Tehtävä 1



Tehtävä 2

Jaetaan aluksi 20 makaronia jokaiseen kuppiin.

a) Siirretään 4 makaronia kupista nro 1 kuppiin nro 5. (24 makaronia kupissa nro 5 ja 16 kupissa nro 1)
Siirretään 2 makaronia nro 2:sta nro 4:ään. (22 makaronia kupissa nro 4 ja 18 kupissa nro 2)
Tulos:

Kuppi nro 1: 16
Kuppi nro 2: 18
Kuppi nro 3: 20
Kuppi nro 4: 22
Kuppi nro 5: 24

b) Siirretään 8 makaronia kupista nro 1 kuppiin nro 5 ja sen jälkeen 4 makaronia kupista nro 2 kuppiin nro 4.
Tulos:

Kuppi nro 1: 12
Kuppi nro 2: 16
Kuppi nro 3: 20
Kuppi nro 4: 24
Kuppi nro 5: 28

c) Siirretään 12 makaronia kupista nro 1 kuppiin nro 5 ja sen jälkeen 6 makaronia kupista nro 2 kuppin nro 4.
Tulos:

Kuppi nro 1: 8
Kuppi nro 2: 14
Kuppi nro 3: 20
Kuppi nro 4: 26
Kuppi nro 5: 32

d) Siirretään 2n makaronia kupista nro 1 kuppiin nro 5. Siirretään n makaronia kupista 2:sta kuppiin nro 4.
Tulos:

Kuppi nro 1: 20-2n
Kuppi nro 2: 20-n
Kuppi nro 3: 20
Kuppi nro 4: 20 + n
Kuppi nro 5: 20 +2n

Jos kuppi nro 1 ei saa olla tyhjä, niin on oltava $n \leq 9$.

Tehtävä 3

On tehtävä useampia havaintoja ennen kuin kannattaa ehdottaa pallojen väriä ja määrää. Hyvän vastauksen pitää sisältää arvio siitä, kuinka suuri osuus joka väriä on suhteutettuna havaintojen määrään.

Osuudet on kirjoitettava seitsemäsosina, esim. 1/7-2/7-4/7.

30-40 havaintoa antaa riittävän pohjan perustellulle ehdotukselle.

Tehtävä 4	Ehdotus selityksestä: Korttien arvot ovat a ja b. Kaksinumeroiden lukujen summa on 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b). Kun jaetaan 11(a + b) lausekkeella (a + b), sadaan vastaukseksi 11.
Tehtävä 5	Riisiä on mahdollista jakaa seuraavasti:

	8	0	0	1 täysi ja 2 tyhjää astiaa
1	5	0	3	3dl:n astia täytetään.
2	5	3	0	Riisit 3dl:n astiasta kaadetaan 5dl:n astiaan.
3	2	3	3	3dl:n astia täytetään uudestaan 8dl:n astiasta.
4	2	5	1	5dl:n astia täytetään riisillä 3dl:n astiasta, johon jää 1 dl.
5	7	0	1	5dl:n astia tyhjennetään 8dl:n astiaan.
6	7	1	0	3dl:n astiasta 1dl kaadetaan 5dl:n astiaan.
7	4	1	3	3dl:n astia täytetään 8dl:n astiasta, johon jää 4dl.
8	4	4	0	3dl:n astia tyhjennetään 5dl:n astiaan.

Kommentti: **Tehtävä 3:** Joukkue, joka ensimmäisenä esittää oikean vastauksen perusteluineen, saa 5 pistettä. Joukkue, joka toisena esittää oikean vastauksen perusteluineen, saa 4 pistettä. Joukkue, joka esittää oikean vastauksen perusteluineen viimeisenä, saa 3 pistettä. Joukkueet, jotka esittävät oikean vastauksen yhtä aikaa, saavat keskenään saman pistemäärän.

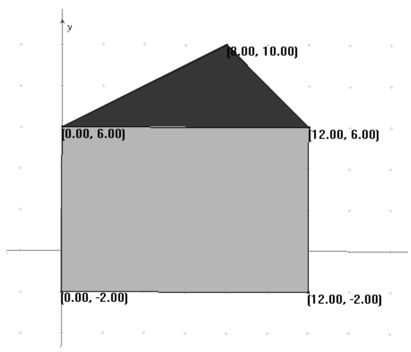
Pohjoismainen loppukilpailu

Tehtävä 2	Saadakseen laatikon, kulmat täytyy olla samalnlaiset parittain. Kolmesta annetuista kokoista jokaisen sivun täytyy olla yhtenäisen kulman toisen kanssa. 96=2·2·2·2·2·3, 168=2·2·2·3·7 252=2·2·3·3·7 Jos yritetänn yhdistää näitä, nähdään että jos 8 on yhtenäisen kulman sivuille joilla on pinta-alat 96 ja 168, 12 yhtenäisen kulman sivuille pinta-alat 96 ja 168, 21 tätyy olla yhtenäisen kulman sivuille joilla on pinta-alat 168 ja 252. **Laatikolla on mitat: 8x12x21 cm**. Tilavuus än vähän enemmän kuin2 litra.
Tehtävä 3	**Neljä on pienin määrä tikat** (11+23+26+40 tai 16+26+29+29)mikä antaa täsmälleen 100 pistettä. Muut mahdollisuudet ovat: 11+111+23+26+29, 11+11+16+16+23+23, 11+11+26+26+26, 11+11+11+11+16+40, 16+16+16+23+29, 11+11+11+11+11+16+29, …
Tehtävä 4	Ruukukon mitat ovat 6·10. Nelikulmisen määrä lävistettyjä ruutuja on pienin yhdistetyn ”multippeli” sivu-pituuksista. Löydäkseen kosketuksien määrä, jakaa pelilaudan mitat suuremmalla yhdisetyllä ”faktorilla” mitoissa ja lisää tulokset yhteen. Pienin yhdistetyn ”multippeli”6:sta ja 10:stä on 30, suurin yhdistetyn ”faktori”6:sta ja 10:stä on 2, joten summaa 6/2:sta ja 10/2:sta on 8.

2007

1. kierros

Tehtävä 1	**a) 0** Yksinumeroisia 9 kpl Kaksinumeroisia 90 kpl: 2·90=180 numeroita Kolmenumeroisia 900 kpl: 900·3 =2700 numeroita 2006-180-9=1817 1817/3=605 ja 2/3 9+2·90+3·605=2004 Seuraava luku numerosarjassa on 606. Toinen numero 0. (2005: 6, 2006:0, 2007:6)
Tehtävä 2	2(a+12)+2(b-5)-2a-2b= **14 cm**
Tehtävä 3	**9837**
Tehtävä 4	**f) yhdeksän**
Tehtävä 5	**Hän tulee 5 min liian myöhään.** (20/20+20/30+20/40=1+2/3+1/2=6/6+4/6+3/6=13/6= 2 1/6 (h) = 2h ja 10 min)
Tehtävä 6	Pinta-ala on 12·4/2 +12·8=**120 pinta-alayksikköjä**.

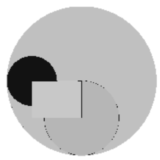


Tehtävä 7	**1916** (a+a+9+a+2·9+a+3·9+a+4·9+a+5·9+a+6·9 = 7a+21·9, minkä on oltava yhtä suuri kuin 13601).
Tehtävä 8	7 heittoa 6·6·6= **216 mahdollisesta heitosta.** 1,1,1 1,2,1 1,1,2 2,1,1 1,2,2 2,1,2 2,2,1

2. kierros

Tehtävä 1

3/4 suurimmasta ympyrästä + 1/4 pienemmästä ympyrästä ja 1/4 keskikokoisesta ympyrästä.



$$\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot 6^2+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\frac{\pi}{4}\cdot 337$$
$$\approx 264{,}7\,m^2 \approx 265\ m^2$$

Tehtävä 2

a) Korkeus on **20 cm**. Rungon ja kaikkien oksien kokonaispituus on **200 cm** .

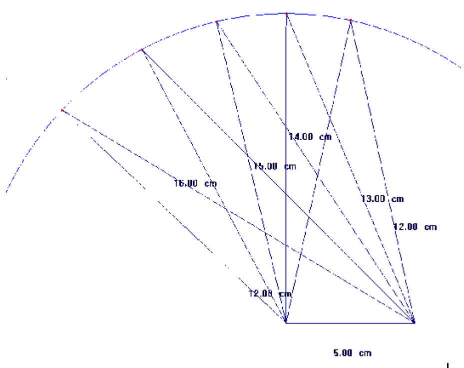
b) Korkeus on **50 cm.** Rungon ja kaikkien oksien kokonaispituus on **147620 cm.**

Tehtävä 3

Vuonna 2018.
Karkauspäivät mukaan laskettuna on siirryttävä eteenpäin
7 päivää -1 karkauspäivä - 1 karkauspäivä + 7päivää – 1 karkauspäivä, jotta kaikki päivät olisivat täysin samalla tavalla kuin vuonna 2007.

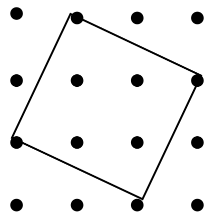
Tehtävä 4

Alla olevasta kuviosta voidaan päätellä, että korkein kolmio on 5,12,13. Koska kaikilla kolmioilla on sama kanta, korkeimmalla kolmiolla on myös suurin pinta-ala.
Vastaus :b



Tehtävä 5

Sivun pituus 2: 4 kpl
Sivun pituus 3: 1 kpl
Sivun pituus √5: 2 kpl
Vastaus: 7 kpl



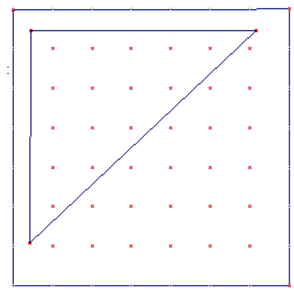
Tehtävä 6

Vastaus: Vähintään 30 kultaistanoutajaa.

Saksanpaimen-koiria	Mäyrä-koiria	Kultaisia-noutajia
Vähintään 5:	25	
Korkeintaan 5:		30
Vähintään 6:	30	
Korkeintaan6:		36
Vähintään 7:	35	
Korkeintaa 7:		42
….	…..	….

Uppgift 7

On olemassa **36 mahdollista yhdistelmää** ja **15:**ssä niistä silmäluku on suurempi toisessa heitossa kuin ensimmäisessä heitossa.



Tehtävä 8

Pussi 1: 8 kpl
Pussi 2: 6 kpl
Pussi 3: 4 kpl
Pussi 4: 5 kpl
Pussi 5: 7 kpl

Kommentti **Tehtävä 2:** 2 p a)-osasta ja 3 p b)-osasta.

Semifinaali

Tehtävä 1

9 tapaa.
(Ensimmäisen kirjeen voi lähettää väärin jollekin kolmesta henkilöstä. Tämän jälkeen ensimmäisen vastaanottajan oikea kirje voidaan lähettää väärin kolmelle jäljellä olevalle henkilölle. Loput kaksi kirjettä voidaan jakaa jäljellä oleville kahdelle henkilölle väärin ainoastaan yhdellä tavalla.)

Tehtävä 2

$4\cdot 6 = 24$ tai $3\cdot 10 =$ **30**
Kokeilemalla järjestelmällisesti voidaan sulkea pois kaikki muut mahdollisuudet tutkimalla yhtälöä $2x + 2y + 4 = xy$.

Tehtävä 3

A: 88l , B: 40l

Tehtävä 4

20 tuntia. Kello on 8 seuraavana aamuna

Tehtävä 6

Linda Koivisto , Sofia Nyman , Ulla Lahtinen , Elsa Pettersson.
Tehtävä voidaan ratkaista myös huomaamalla, että 32 on parillinen luku, jota ei voida saada kertomalla pariton määrä parittomia lukuja parittomilla luvuilla. Toisin sanoen 1 ja 3 on kerrottava 1:llä ja 3:lla (tai toisin päin), ja 2 ja 4 on kerrottava 2:lla ja 4:llä (tai toisin päin).

Tehtävä 7

42 ihmistä seisoo jonossa.

Tehtävä 8

43 kappaletta
Jos tarkastellaan kuvion vasenta puolta, saadaan 9 pientä, 4 tylppäkulmaista sekä lisäksi 4 suorakulmista kolmiota. Tämä määrä voidaan tuplata, ja sen lisäksi saadaan 5+4 kolmiota, kun katsotaan koko kolmiota.

Kansallinen loppukilpailu

Tehtävä 1

Pelin strategia on seuraava. Se, joka ei aloita peliä, voi voittaa toimimalla näin:
- Jos vastapelaaja ottaa 1 tikun 1. kierroksella, ota 3 tikkua.
- Jos vastapelaaja ottaa 2 tikkua 1. kierroksella, ota 4 tikkua.
- Jos vastapelaaja ottaa 3 tikkua 1. kierroksella, ota 1 tikku.

Tällä tavoin on yhden kierroksen jälkeen purkista otettu aina 4 tikkua.
Jos jatketaan samalla tavalla, tästä seuraa, että kun on aloittaneen pelaajan vuoro, purkissa on jäljellä 16-12-8-4-0 tikkua.

Tehtävä 2

Siirtämällä nappuloita opettajan kehottamalla tavalla on mustalla paikalla istuvan oppilaan siirryttävä valkoiseen paikkaan ja päin vastoin.
Koska valkoisia paikkoja on 13 ja mustia 12, **ei ole mahdollista**, että oppilaat voisivat siirtyä kehotuksen mukaisesti.

Tehtävä 3

Karkit voidaan jakaa **36 eri tavalla.**
Karkkien lukumäärä voidaan jakaa 3 eri tavalla: (1,1,2), (1,2,1) ja (2,1,1).
Kaikissa näissä tapauksissa värit voidaan jakaa 12 eri tavalla.
On 3 tapaa jakaa karkit siten, että Anna saa sinisen (S): (S,K,MP), (S,M,KP) ja (S,P,MK).
Annalla on mahdollisuus saada neljä eri väriä. Siksi jako (1,1,2) voidaan tehdä 12 eri tavalla. Samalla tavalla voidaan päätellä muut jaot.

Tehtävä 5

15-15-16-16-19-19
15-15-16-17-18-19
15-15-17-17-18-18
16-16-16-16-18-18
(voi olla useampia ratkaisuja)

Pienin määrä tikkoja on 6, koska mistään osumasta ei saa enempää kuin 19 pistettä.

Pohjoismainen loppukilpailu

Tehtävä 1

496.
Kolmioluvut ovat muotoa
$$1+2+3+...+n=\frac{n(1+n)}{2}$$
Summan täytyy olla pienempi kuin 500 .
Siis: $n(n+1)<1000$
Koska $\sqrt{1000}=31{,}6$, saadaan $n<32$

Koska suurin kolmioluku on pienempi kuin 500 saadaan: $\dfrac{31\cdot 32}{2}=496$

Tehtävä 2

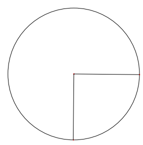
A) Kolmioiden kantojen summa on sama kuin suorakulmion pitempi sivu, ja kaikkien kolmioiden korkeus on sama kuin lyhyempi sivu. Tummennetun alueen pinta-ala on siis puolet suorakulmion pinta-alasta.

B) Käyttämällä Pythagoras'n lausetta tai muita geometrisia perusteluja voidaan osoittaa, että tummennettu alue on 1/3 suurimman kolmion pinta-alasta.

Jos leikataan kaikki neljä osaa irti, voidaan näyttää, että edellä esitetty pitää paikkansa rakentamalla tummista osista kaksi valkoisen kolmion kanssa yhtenevää kolmiota.

Tehtävä 3

Kartio on tehty osasta ympyrää, jonka säde on 4. Tämän osan kaaren on oltava yhtä pitkä kuin sellaisen ympyrän piiri, jonka säde on 3.
Merkitään kartioon käytettävän ympyräsektorin kaaren pituuden osuutta koko ympyrän kaaresta (piiristä) x:llä.
Saadaan:
$$2\pi\cdot 4\cdot x=2\pi\cdot 3$$
$$x=\frac{3}{4}$$



Tehtävä 4	Ero Annan ja Tomin vastauksessa on 4740 – 4695 = 45, mikä on 3 kertaa vääärinymmärretty numero. Siksi toinen luku on 15 ja oikea vastaus on 4740 + 2 · 15 = **4770.**
Tehtävä 5	Korttien järjestys on seuraava: **A-Q-2-8-3-J-4-9-5-K-6-10-7**

2008

1. kierros

Tehtävä 1	**83,5 kg**
Tehtävä 2	**120€, 80€** ja **60 €**
Tehtävä 3	**d)**
Tehtävä 4	**97m**
Tehtävä 5	**19**
Tehtävä 6	**32 lukua**
Tehtävä 7	**15 min** (Klo 12 jätättävä kello näyttää 11.46, minkä jälkeen siltä kuluu jätättämisen takia vielä 14+1 minuuttia kunnes se näyttää 12.)
Tehtävä 8	[**29** | **9** | **2**] Kolmas luku on ensimmäisen ja toisen luvun osamäärän jakojäännös. Tai: [**29** | **9** | **-7**] Kolmas luku on ensimmäisen ja toisen luvun osamäärän jakojäännös sillä lisäyksellä, että jako-laskujen vastauksina ovat kokonaisluvut 2 2 3 3 4 jne.
Kommentti	**Tehtävä 8:** Saa 2 p, jos vastauksessa on 29 ja 9. (Perustelu: jokaisesta tehtävästä on saatava pisteitä ja tässä tehtävässä helposti tulevista mahd. väärinkäsityksistä ei rangaista niin ankarasti.)

2. kierros

Tehtävä 1	**5348**
Tehtävä 2	**40 km**
Tehtävä 3	**6543, 1999, 8161**
Tehtävä 4	**110cm^2, 128 cm^2, 182 cm^2**
Tehtävä 5	**96 minuuttia**

Tehtävä 6	**1936+36+36 eller 1764+144+100 tai...**
Tehtävä 7	**Suorakulmio ja leija.**
Tehtävä 8	**10**
Kommentti	**Tehtävät 3 ja 4:** Pistemäärä riippuu oikeiden ja väärien vastauksien lukumääristä. 2 oikeasta vastauksesta saa 3p, yhdestä oikeasta 1p, väärästä vastauksesta –2p.

Semifinaali

Tehtävä 1

Kukkapenkissä on **1/16 (6,25 %)** pääsiäisliljoja.

Tehtävä 2

Merkitään kuusikulmion pienintä kulmaa x:llä. Tällöin kulmien summa on x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) + (x + 10) = 6x + 30

Kulmien summa jokaisessa kuusikulmiossa on 720°. Saadaan: 6x + 30 = 720 → x=115

Suurin kulma on 115 + 10 = **125 astetta**.

Tehtävä 3

Lämpötila on t_i helmikuun *i*. päivä. Siis

$$\frac{\sum_{i=1}^{21} t_i}{21} = 14\ ja\ \frac{\sum_{i=22}^{24} t_i}{24} = 16$$

Saadaan:

$$\frac{\sum_{i=1}^{21} t_i + \sum_{i=22}^{24} t_i}{24} = \frac{14 \cdot 21 + t_{22} + t_{23} + t_{24}}{24} = 16$$

Tai: $t_{22} + t_{23} + t_{24} = 16 \cdot 24 - 14 \cdot 21$

$$\frac{t_{22} + t_{23} + t_{24}}{3} = \frac{16 \cdot 24 - 14 \cdot 21}{3} = 30$$

Keskilämpötila helmikuun 22.-24. päivä oli **30 astetta.**

Tehtävä 4

Valitsemalla 4 pistettä voidaan piirtää 6 eri suorakulmiota. Nämä neljä pistettä voidaan valita 9·8·7·6 eri tavalla. Todennäköisyys, että ne muodostavat neliön, on:

$$\frac{6}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{504}$$

(Vaihtoehtoisesti: Tämä on vähän monimutkaisempi tapa. Kaikki 3024 tapaa valita 4 pistettä eivät muodosta nelikulmiota. Jos kolme pisteistä on samalla suoralla, muodostuu kolmio.
Näin tapahtuu $8 \cdot 6=48$ tapauksessa. Siis voidaan muodostaa 3024-48=2976 nelikulmiota, joista 6 on neliöitä. Tämä merkitsee sitä, että

$$\frac{6}{2076}=\frac{1}{346}$$

muodostettavista nelikulmioista on neliöitä.)

Tehtävä 5

Luvussa täytyy olla monta nollaa. Kokeilemalla 5:llä, 6:lla ja 7:llä nollalla nähdään, että seuraava luku sopii: **6210001000**

Tehtävä 6

Jos kerrotaan 9:llä ja saadaan nelinumeroinen vastaus, tuhansien paikalla olevan numeron täytyy olla 1. Silloin ykkösten paikalla oleva numero on 9 ja numeron satojen paikalla täytyy olla 0, koska numero 1 ei voi olla sekä kymmenien että satojen paikalla. Luku on siis 10_9 .
Koska 9·9=81, kymmenien paikalla täytyy olla numero, joka kerrottuna 9:llä antaa luvun, jossa yksiköiden paikalla on numero 2 (jolloin saadaan kokonainen kymmenluku, kun lisätään 8). Kymmenien paikalla olevan numeron täytyy siis olla 8.
Kysytty luku on siis **1089.**

Tehtävä 7

Nopeus on laskenut. Muutos on 4%.

Tehtävä 8

Tehtävä voi ensin tuntua mahdottomalta, mutta on nerokkaan yksinkertainen, jos tajuaa idean.
Otetaan 10 satunnaista kolikkoa pöydältä. Tätä kutsutaan ”ryhmäksi 1” ja muita ”ryhmäksi 2”.
Merkitään kruuna ylhäällä olevien kolikkojen määrää ryhmässä 1 x:llä,
Siis ryhmässä 2 on (10-x) kruunaa.
Käännetään kaikki kolikot ryhmässä 1.
Tällöin ryhmässä 1 on (10-x) klaavaa, siis yhtä paljon kuin ryhmässä 2.

Kansallinen loppukilpailu

Tehtävä 1

On löydettävä luku n, jolle pätee

$$\frac{288}{n-2}-\frac{288}{n}=4{,}8 .$$

Huomaa, että 288/4,8=60 .

Saamme yhtälön: $$\frac{60}{n-2}-\frac{60}{n}=1 .$$

Kokeilemalla saadaan n=12 (oppilaat eivät osaa vielä ratkaista 2. asteen yhtälöitä).
(60/10=6 och 60/12=5.)

Tehtävä 2

Vaihtoehto: ratkaistaan alusta asti kokeilemalla.
Kaikki tervehtivat eri määrää henkilöitä, herra Olssonia lukuun ottamatta. Hän voi tervehtiä yhtä montaa kuin joku muu. Kukaan ei voi tervehtiä enempää kuin 8 henkilöä. Näin ollen heidän on tervehdittävä 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8 henkilöä.

Käytetään aviopareista merkintöjä:
A (herra Olsson) ja B (hänen vaimonsa)
C ja D
E ja F
G ja H
I ja J

Henkilöä:	On tervehtinyt:
A	C, E, G, I
B	C, E, G, I
C	A, B, E, G, I
D	E, G, H
E	A, B, C, D, G, I
F	G, H
G	A, B, C, D, E, F, G
H	I
I	A, B, C, D, E, F, G, H
J	Ei kukaan

Herra Olsson on tervehtinyt 4 henkilöä, yhtä montaa (ja samoja) kuin vaimonsa.

Tehtävä 3

x= 108°, y=72, z= 36°

Tehtävä 4

Tulo on $72=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$

Lasten iät	Lasten ikien summa:
1, 2, 36	39
1, 3, 24	28
1, 4, 18	23
1, 6, 12	19
1, 8, 9	18
2, 2, 18	22
2, 3, 12	17
2, 6, 6	**14**
2, 4, 9	15
3, 3, 8	**14**
3, 4, 6	13

Yhden lapsista täytyy olla nuorin, joten lasten iät ovat 2 vuotta, 6 vuotta ja 6 vuotta.

Tehtävä 5

20 yhdistelmää antaa parillisen summan:	25 yhdistelmää antaa parittoman summan:
1-3, 1-5, 1-7, 1-9 2-4, 2-6, 2-8, 2-10 3-5, 3-7, 3-9 4-6, 4-8, 4-10 5-7, 5-9 6-8, 6-10 7-9 8-10	1-2, 1-4, 1-6, 1-8, 1-10 2-3, 2-5, 2-7, 2-9 3-4, 3-6, 3-8, 3-10 4-5, 4-7, 4-9 5-6, 5-8, 5-10 6-7, 6-9 7-8, 7-10 8-9 9-10

Kannattaa siis pelata parittomilla luvuilla. Tällöin voittaa todennäköisesti yli puolet peleistä (keskimäärin viisi yhdekästä.)

Pohjoismainen loppukilpailu

Tehtävä 1

Oletetaan, että $A \geq B \geq C \geq D \geq E$

$$A+B+C+D=55$$
$$A+B+C+E=56$$
$$A+B+D+E=61$$
$$A+C+D+E=63$$
$$B+C+D+E=65$$

Jos lasketaan yhteen kaikki viisi summaa, jokainen ystävys tulee lasketuksi neljään kertaan. Voidaan merkitä

$4A+4B+4C+4D+4E=55+56+61+63+65$

tai

$$A+B+C+D+E=\frac{55+56+61+63+65}{4}=75$$

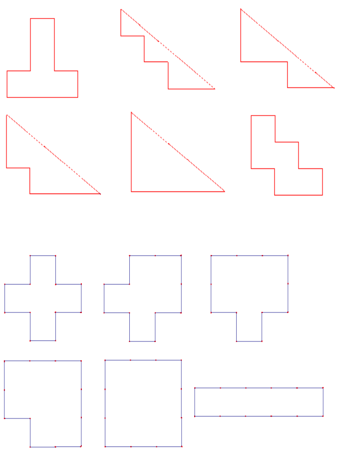
Neljän vanhimman ystävyksen ikien summa on $B+C+D+E=65$.

Tällöin nuorimman ikä on

$A=75-65=10$

Nuorin on 10-vuotias.

Tehtävä 2



Tehtävä 3

Versio 1: **Oikeudenmukainen** 50 – 50

	2	**4**	**6**	**8**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
2	e	v	e	n		o	d	d	
4	e	v	e	n	+	e	v	e	n
6	e	v	e	n	=	o	d	d	
8									
1									
3	e	v	e	n		o	d	d	
5	o	d	d		+	o	d	d	
7	e	v	e	n	=	e	v	e	n
9									

Versio 2: **Epäoikeudenmukainen** 41(even) -40 (odd)

	0	**2**	**4**	**6**	**8**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
0										
2		e	v	e	n		o	d	d	
4	+	e	v	e	n	+	e	v	e	n
6	=	e	v	e	n	=	o	d	d	
8										
1										
3		e	v	e	n		o	d	d	
5	+	o	d	d		+	o	d	d	
7	=	e	v	e	n	=	e	v	e	n
9										

Tehtävä 5

Kun pelaaja on siirtänyt pelinappulan alimmalle riville, toinen pelaaja tulee voittamaan. Strategiana on siis välttää siirtämästä nappulaa alimmalle riville.

Toiseksi alimmalla rivillä turvallisia paikkoja ovat siis paikat nro 1, 3 ja 5. Käyttämällä samaa päättelyä ylempien rivien kohdalla huomataan, että turvallisia paikkoja ovat värilliset ruudut.